Wiskunde Anibrand

Teorieboek Graad 11

Annie Bothma

Table of Contents

Wiskunde Anibrand

Teorieboek Graad 11

Annie Bothma

Graad 11 en 12 Teorieboek opgestel deur A Bothma

ISBN: 978-1-928327-12-7

Opsomming van teorie Gr 10: Vraestel 1

Getalpatrone (rye)

- Konstante 1ste verskil: T_n is linieêr - ‘n rekenkundige ry. $T_n = a + (n - 1)d$

a – waarde van T_1; d – konstante verskil; n – nommer van term

Eksponente en wortels

- Indien basis ‘n getal is maak dit priem: $27 = 3^3$; $\frac{1}{16} = 2^{-4}$; $48 = 6.8 = 2.3.2^3 = 2^4.3$

Wette: 1. $a^p.a^q = a^{p+q}$ 2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ 3. $(a^p)^q = a^{pq}$ 4. $\left(\frac{a.b}{c}\right)^p = \frac{a^p.b^p}{c^p}$ 5. $(a)^0 = 1$

- $\frac{27^{x+3}.6^{2x}}{18^{-x+4}}$ is ‘n uitdrukking met slegs faktore – vat alle magte boontoe en verander die tekens van die eksponente van die magte wat boontoe gevat is.
- $\frac{3^{n+2} + 2.3^{n-3}}{3^{n+1}}$ is ‘n uitdrukking wat terme bevat – split die eksponente, haal ‘n gemeenskaplike faktor uit en kanselleer
- Verwyder negatiewe eksponente uit antwoord
- $2(3^{2n})^{n+1} = 18$ - eksponensiële vergelyking. Kry 1 basis links, 1 basis regs, stel eksponente gelyk en los op vir n in die vgl

Vergelykings

- Verwyder hakies en breuke (verm elke teller met kgv van noemers)
- Tel gelyksootige terme weerskante op en identifiseer.
- Indien kwadraties, kry standaardvorm $ax^2 + bx + c = 0$
- Los op vir x deur te faktoriseer.
- Indien vgl met breuke begin – toets antwoorde aan beperkings

Grafieke

NB onthou alle inligting moet op skets aangedui word – jy kry slegs punte vir jou skets

1. Parabool $y = ax^2 + q$

Skets: Kry x-afsnitte deur y=0 te maak, lees die DP af as (0;q), y-asnit is selfde as DP, sim-as x = 0.

Bepaal formule: Begin met standaardvorm $y = ax^2 + q$

Vervang eers DP se y-waarde in q in – as jy die DP het. Kry dan vir a deur ‘n ander punt in x en y in te vervang. As jy 2 punte het wat nie die DP is nie, vervang beide in en los 2 vgls gelyktydig op.

2. Reguitlyn $y = mx + c$ m – helling c – y-afsnit

Skets: Kry x-afsnit deur y=0 te maak, kry y-asnit deur x=0 te maak. Indien c = 0, kry ‘n 2de punt deur ‘n x-waarde te kies bv x = 1 en werk die y-waarde met die formule uit.

- *Bepaal formule:* Begin met standaardvorm $y - y_1 = m(x - x_1)$ en eindig met $y = mx + c$

Jy moet die helling en een punt op die lyn hê. As jy ‘n lyn ewewydig aan of loodreg op die gevraagde lyn het, kan jy m bereken. Ewewydige lyne se hellings is diesefde en loodregte lyne se hellings het ‘n produk van –1. Indien 2 punte op die lyn bekend is kan m bereken word met $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Vervang die helling by m in die standaardvorm en die gegewe punt by x_1 en y_1. Vereenvoudig tot $y = mx + c$

3. Hiperbool $y = \frac{a}{x} + q$

Skets:

Skryf die waardes van a en q uit jou formule neer. a – gee jou 2 kwadrante (1 en 3 vir pos en 2 en 4 vir neg a)
q – gee jou horisontale asimptoot y = q.
hierdie jaar is jou vertikale asimptoot altyd die Y-as met formule x = 0.
Skets eers jou asimptote in en dan die 2 kurwes in die regte kwadrante
Kry x-afsnit deur y=0 te maak, kry y-asnit deur x=0 te maak (indien hulle bestaan). Dui aan op skets.
Indien ekstra punte op skets gevra word, kry met 'n tabel.
Sim asse: $y = x + q$ en $y = -x + q$

Bepaal formule: Begin met $y = \frac{a}{x} + q$ en vervang q uit horisontale asimptoot in. Kry a deur enige ander punt op hiperbool in te vervang.

4. **Eksponensiale grafiek** $y = a.b^x + q$

Skets:

Skryf die waardes van a, b en q uit jou formule neer. a – sê of die grafiek regop (pos) of omgekeerd (neg) is b – sê of asimptoot na links (heelgetal) of regs (breuk) lê
q – gee horisontale asimptoot: y = q
Bereken y-afsnit deur x = 0 te maak.
Bereken nog 'n punt deur x te kies (+1 of -1) , dit in die formule in te vervang en y te bereken. Dui hierdie 2 punte op skets aan.
Skets jou kurwe deur 2 punte om 'n asimptoot met stippellyn te maak.

Bepaal formule: Begin met standaardvorm wat vir jou gegee word. Vervang eers vir q in as die horisontale asimptoot gegee is. Bereken dan die ander onbekendes in die gegewe standaardvorm deur punte op die grafiek in te vervang.

5. Lengtes van lyne

AB // X-as: AB = $x_{regs} - x_{links}$ CD // Y-as: CD = $y_{bo} - y_{onder}$ EF nie // een van die asse: EF

EF= $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

6. Snypunte Kry die snypunte van 2 grafieke deur hulle vgls gelyktydig op te los – stel die twee formules se y-waardes gelyk.

Finansies

A – eindbedrag **P** – beginbedrag **i -** $\frac{rentekoers}{100}$ **n** – aantal beleggingsperiodes

$A = P(1 + i.n)$
Enkelvoudige rente en Huurkoop

$A = P(1 + i)^n$
Saamgestelde rente en Inflasie

Wisselkoers lewer altyd 'n **direkte eweredigheid.** Stel 'n tabel op en skep dan 'n vergelyking deur die 2 verhoudings aan mekaar gelyk te stel.

Waarskynlikheid $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ en

$P(A\ of\ B) = P(A) + P(B) \quad onderling\ uitsluitend$

$P(A\ of\ B) = P(A) + P(B) - P(A\ en\ B) \quad onderling\ NIE\ uitsluitend$

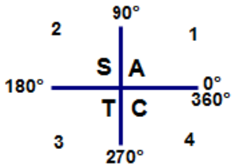
Opsomming van teorie Gr 10: Vraestel 2

Analitiese Meetkunde

- **Lengte** van lyn AB of afstand tussen punte A en B: $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$
- **Middelpunt** M van lynstuk AB: $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ en $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$
- **Helling/gradiënt** van lyn AB: $m_{AB} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$; Indien lyn AB // CD is, $m_{AB} = m_{CD}$ Indien lyn $AB \perp CD$ is $m_{AB} \times m_{CD} = -1$
- Indien punte A, B en C **koliniêr (saamlynig)** is, maak lynstukke AB en BC en dan is $m_{AB} = m_{BC}$
- **Vergelyking** van reguitlyn AB: Begin met standaardvorm $y - y_1 = m(x - x_1)$ en eindig met $y = mx + c$

Trigonometrie

- **Definisies** van 3 trig verhoudings in 'n assestelsel: $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ en $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
- **Definisies** van 3 trig verhoudings in 'n reghoekige driehoek: $\sin\theta = \dfrac{t}{s}$, $\cos\theta = \dfrac{a}{s}$ en $\tan\theta = \dfrac{t}{a}$
- **Omgekeerdes:** $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ en $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$
- Gebruik die CAST diagram om te sien in watter kwadrante 'n funksie se waarde pos en in watter kwadrante dit neg is.



- Wanneer jy hoeke of funksiewaardes met die **sakrekenaar** bereken, maak seker die sakrekenaar is op **degrees.**
- Wanneer jy 'n **hoek** met jou calculator bereken onthou om **shift** en dan sin/cos/tan en dan getal in te sit.
- Spesiale/standaardhoeke is $0°$; $90°$ asook $30°$; $45°$ *en* $60°$. Werk die trig verhoudings hiervan elkeen apart uit met jou calculator.

Trig grafieke $y = a\sin x + q$ $y = a\cos x + q$ $y = a\tan x + q$

Skets:
Skryf basisgrafiek neer. Skryf dan neer watter transformasie op y-basis uitgevoer moet word om y-nuwe te kry. Stel tabel vir basisgrafiek met calc op en kry die nuwe y-waardes met transformasie. Plot die punte met x-basis en y-nuwe.

Bepaal vergelyking:
Begin met gegewe standaardvorm. Kry q uit ewewigslyn. Kry a deur maks verplasing vanaf ewewigslyn en deur te kyk of grafiek regop of omgekeerd is vir sin en cos. Vir tan kry jy a deur 'n punt op die grafiek in die vergelyking in te vervang.

Transformasies

- **Translasies:** 2 regs – tel +2 by x; 3 links – tel -3 by x; 5 op – tel +5 by y; 4 af – tel -4 by y.
  Algemene reël vir transleer 2 regs en 3 af: $(x; y) \rightarrow (x+2; y-3)$
- **Refleksies:** **Spieëlbeeld in 'n sekere lyn.**
  1. **In die x-as**: y se teken verander . Algemene reël $(x; y) \rightarrow (x\ ; -y)$
  2. **In die y-as**: x se teken verander . Algemene reël $(x; y) \rightarrow (-x\ ; y)$
  3. **In die lyn y = x**: x en y ruil om . Algemene reël $(x; y) \rightarrow (y\ ; x)$
  4. **In die lyn y = - x**: x en y ruil om en beide tekens verander

Statistiek

- **Maatstawwe van sentrale tendens:**
  1. **Gemiddeld van ongegroepeerde data =** som van alle datapunte / aantal datapunte
  2. **Gemiddeld van gegroepeerde data =** $\dfrac{\sum(f \times klasmiddelpunt)}{\sum f}$
  3. **Modus =** datapunt wat die meeste voorkom
  4. **Mediaan se nr** = $\dfrac{1}{2}(n+1)$ met n die aantal datapunte
  5. **Mediaan se waarde** Q_2 = middelste datapunt in datastel wat stygend rangsk k is
  6. **Modale klas** = klasinterval met grootste frekwensie in gegroepeerde data.
- **Maatstawwe van verspreiding:**
  1. **Omvang** = grootste datapunt – kleinste datapunt
  2. **Onderste kwartiel** Q_1 **se nommer** = $\dfrac{1}{4}(n+1)$
  3. **Boonste kwartiel** Q_3 **se nommer** = $\dfrac{3}{4}(n+1)$
  4. **Interkwartiele omvang =** Q_3 - Q_1
  5. **Vygetalopsomming (min; Q1; Q2; Q3; maks)**

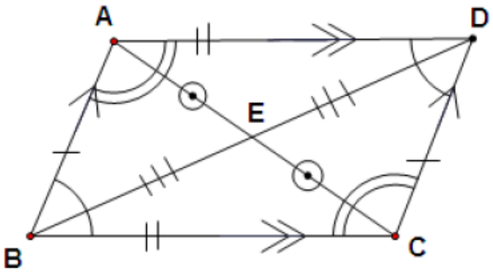
Volume en buite oppervlakte van prismas

- **Omtrek sirkel =** $2\,\Pi\, r$ **Oppervlakte sirkel =** $\Pi\, r^2$ **Oppervlakte driehoek =** $\dfrac{1}{2} \times b \times \perp h$

Prismas	Piramiedes	Keël	Sfeer
B-oppvl = som van alle oppvlakke	B-oppvl = som van alle oppvlakke	B-oppvl = som van alle oppvlakke	B-oppvl = $4\pi r^2$
Volume = oppvl basis . hoogte	Volume = $\frac{1}{3}$ oppvl basis . hoogte	Volume = $\frac{1}{3}$ oppvl basis . hoogte	Volume = $\frac{4}{3}\pi r^3$

NB: LEER ALLE MEETKUNDE TEORIE ASOOK DIE BEWYSE VAN DIE 4 STELLINGS
Eienskappe en oppervlaktes van reëlmatige vierhoeke

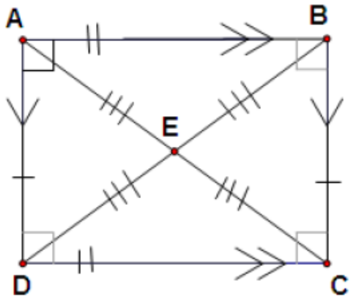
- **Parallelogram**



Definisie:
Vierhoek met 2 paar oorstaande sye ewewydig AD // BC en AB // BC
Eienskappe:
1. 2 paar oorstaande sye gelyk. AD = BC en AB = DC
2. 2 paar oorstaande hoeke gelyk $\hat{A} = \hat{C}$ *en* $\hat{B} = \hat{D}$
3. Hoeklyne halveer mekaar AE = EC en BE = DE

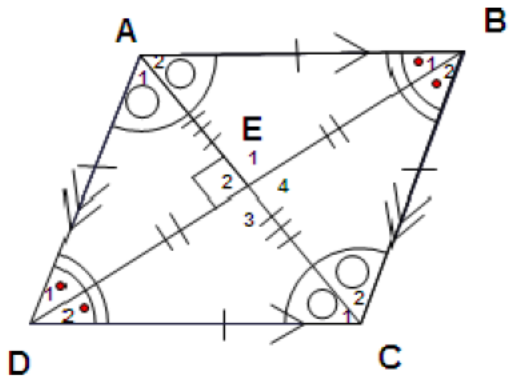
Oppervlakte $= b \times \perp h$

- **Reghoek**



Definisie:
Parallelogram met een regte hoek AD // BC en AB//BC en bv $\hat{A} = 90°$
Eienskappe:
1. 2 paar oorstaande sye ewewydig AD // BC en AB // BC
2. 2 paar oorstaande sye gelyk. AD = BC en AB = DC
3. Alle hoeke is $90°$ $\hat{A} = \hat{C} = \hat{B} = \hat{D} = 90°$
4. Hoeklyne is ewe lank AC = BD
5. Hoeklyne halveer mekaar AE = EC en BE = DE

Oppervlakte $= l \times b$

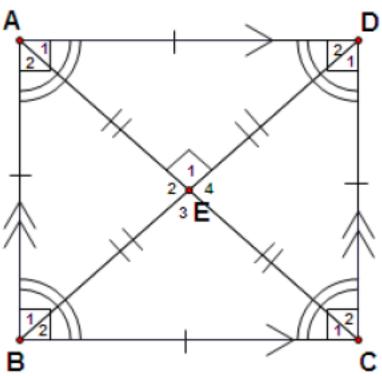


- **Ruit of rombus**

Definisie:
Parallelogram met een paar aangrensende sye gelyk AD // BC en AB // BC en bv AB = BC
Eienskappe:
1. 2 paar oorstaande sye ewewydig AD // BC en AB//BC
2. Al 4 sye gelyk. AD = BC = AB = DC
3. 2 paar oorstaande hoeke gelyk $\hat{A} = \hat{C}$ *en* $\hat{B} = \hat{D}$
4. Hoeklyne halveer mekaar AE = EC en BE = DE
5. Hoeklyne halveer hoeke van ruit.
6. Hoeklyne is loodreg op mekaar $\hat{E}_1 = \hat{E}_2 = \hat{E}_3 = \hat{E}_4 = 90°$ **Oppervlakte** $= b \times \perp h$ **OF**

Oppervlakte = $\frac{1}{2}$ **lengte van hoeklyn 1 × lengte van hoeklyn 2** = $\frac{1}{2}$ **AC × BD**

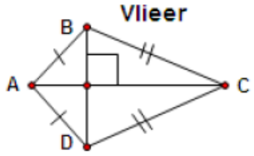
- **Vierkant**



Definisie:
Parallelogram met een paar aangrensende sye gelyk en met 1 regte hoek
AD // BC en AB // BC en bv AB = BC en bv $\hat{A} = 90°$
Eienskappe:
1. 2 paar oorstaande sye ewewydig AD // BC en AB // BC
2. Al 4 sye gelyk. AD = BC = AB = DC
3. Alle hoeke is $90°$ $\hat{A} = \hat{C} = \hat{B} = \hat{D} = 90°$
4. Hoeklyne is ewe lank AC = BD
5. Hoeklyne halveer mekaar AE = EC en BE = DE
6. Hoeklyne halveer hoeke van ruit.
7. Hoeklyne is loodreg op mekaar $\hat{E}_1 = \hat{E}_2 = \hat{E}_3 = \hat{E}_4 = 90°$

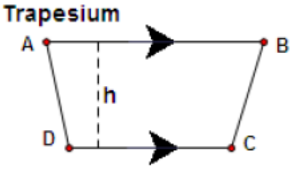
Oppervlakte $= l \times l$

Vlieer



Def: 2 paar aangrensende sye =
Opp = $\frac{1}{2}$ **AC x BD**

Trapesium



Def: 1 paar oorstaande sye ewewydig
Opp = $\frac{1}{2}$ **(AB + DC) h**

Opsomming van teorie Gr 11: Vraestel 1

Getalpatrone (rye)

- Konstante 1ste verskil: T_n is linieêr - 'n rekenkundige ry. $T_n = a + (n - 1)d$

a – waarde van T_1; d – konstante verskil; n – nommer van term

- Konstante 2de verskil: T_n is kwadraties. $T_n = an^2 + bn + c$

2de verskil = 2a 1ste 1ste verskil = 3a + b $T_1 = a + b + c$

- Konstante verhouding: - 'n meetkundige ry. $T_n = a.r^{n-1}$

a – waarde van T_1; r – konstante verhouding n – nommer van term

Eksponente en wortels

- Indien basis 'n getal is maak dit priem: $27 = 3^3$; $\frac{1}{16} = 2^{-4}$; $48 = 6.8 = 2.3.2^3 = 2^4.3$

Wette: 1. $a^p.a^q = a^{p+q}$ 2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ 3. $(a^p)^q = a^{pq}$ 4. $\left(\frac{a.b}{c}\right)^p = \frac{a^p.b^p}{c^p}$ 5. $(a)^0 = 1$

- $\frac{27^{x+3}.6^{2x}}{18^{-x+4}}$ is 'n uitdrukking met slegs faktore – vat alle magte boontoe en verander die tekens van die eksponente van die magte wat boontoe gevat is.
- $\frac{3^{n+2} + 2.3^{n-3}}{3^{n+1}}$ is 'n uitdrukking wat terme bevat – split die eksponente, haal 'n gemeenskaplike faktor uit en kanselleer
- Verwyder negatiewe eksponente uit antwoord
- $2\left(3^{2n}\right)^{n+1} = 18$ - eksponensiële vergelyking. Kry 1 basis links, 1 basis regs, stel eksponente gelyk en los op vir n in die vgl
- $\frac{\sqrt{18} - \sqrt{32}}{\sqrt{50}}$ vereenvoudig eers alle wortels bv $\sqrt{18} = \sqrt{2.9} = \sqrt{2}.\sqrt{9} = 3.\sqrt{2}$. Tel dan gelyksoortige terme bymekaar, kanselleer ens
- $\frac{5}{\sqrt{3}}$ rasionaliseer noemers deur met $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ te vermenigvuldig

Vergelykings

- Verwyder hakies, wortels (isoleer eers wortel), breuke (verm elke teller met kgv van noemers)
- Tel gelyksootige terme weerskante op en identifiseer.
- Indien kwadraties, kry standaardvorm $ax^2 + bx + c = 0$
- Probeer eers oplos vir x deur te faktoriseer.
- Indien geen faktore, los op vir x mbv vierkantsformule $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Los op vir x met vierkantsvoltooiïng slegs as dit gevra word.
- Gebru k k-metode indien jy 'n x^3 *of* x^4 in jou vgl kry. Soek 2 of meer terme wat herhaal en vervang dit met k.
- Indien vgl met breuke of wortels begin – toets antwoorde aan beperkings

Ongelykhede

- Kry alle terme links regs 0
- Tel op om 1 enkele breuk links te kry
- Vermenigvuldig beide kante met $(\text{kgv})^2$
- Sorg dat LK gefaktoriseerd is en dat daar +x en nie –x in elke hakie is
- Indien 2 hakies skets 'n parabool
- Indien 3 hakies skets derdegraadse grafiek
- Dui x-afsnitte en formule van grafiek op skets aan
- Lees oplossing af van grafiek en onthou beperkings
- Kyk uit of jy nie weet wat of die teller of die noemer se teken is nie – kortpad

Aard van die wortels

- Skryf in standaardvorm $ax^2 + bx + c = 0$ en skryf a, b en c se waardes neer.
- Bereken $\Delta = b^2 - 4ac$
- Interpreteer Δ uit die tablel : $\Delta > 0$ *en VV* - wortels is R; rasionaal en ongelyk

$\Delta > 0$ *en NIE VV* - - wortels is R; irrasionaal en ongelyk

$\Delta = 0$ - wortels is R; rasionaal en gelyk

$\Delta < 0$ - - wortels is nie- R

Grafieke

NB onthou alle inligting moet op skets aangedui word – jy kry slegs punte vir jou skets

1. Parabool $y = a(x-p)^2 + q$ $\quad y = a(x-w_1)(x-w_2)$ $\quad y = ax^2 + bx + c$

Skets: Kry x-afsnitte deur y=0 te maak, kry y-asnit deur x=0 te maak, kry DP deur formule in DP vorm te skryf $y = a(x-p)^2 + q$ met DP (p;q) en sim-as x = p. **NB** as jy aflees verander p se teken.

Bepaal formule: Begin met draaipuntvorm of wortelvorm en eindig met uitgebreide vorm.

$y = a(x-p)^2 + q$ as jy die DP het $\quad y = a(x-w_1)(x-w_2)$ as jy die wortels of x-afsnitte het en eindig met $y = ax^2 + bx + c$

2. Reguitlyn $y = mx + c$ $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$

Skets: Kry x-afsnit deur y=0 te maak, kry y-asnit deur x=0 te maak. Indien c = 0, kry 'n 2de punt deur 'n x-waarde te kies bv x = 1 en werk die y-waarde met die formule uit.

Bepaal formule: Begin met standaardvorm $y - y_1 = m(x - x_1)$ met m die helling en $(x_1 ; y_1)$. 'n punt op die lyn

Eindig met standaardvorm $y = mx + c$ met m die helling en c die y-afsnit .

Ewewydige lyne se hellings is diesefde en loodregte lyne se hellings het 'n produk van –1

3. Hiperbool $y = \dfrac{a}{x+p} + q$

Skets: Skryf die waardes van a, p en q uit jou formule neer. a – gee jou 2 kwadrante (1 en 3 vir pos en 2 en 4 vir neg a) p – gee jou vert kale asimptoot x = -p; q – gee jou horisontale asimptoot y = q. Skets eers jou asimptote in en dan die 2 kurwes in die regte kwadrante

Kry x-afsnit deur y=0 te maak, kry y-asnit deur x=0 te maak (indien hulle bestaan). Dui aan op skets. Gebruik table indien ekstra punte gevra word.

Simmetrie asse : $y = (x+p) + q$ en $y = -(x+p) + q$

Bepaal formule: Begin met $y = \dfrac{a}{x+p} + q$ en vervang p uit vertikale asimptoot (teken draai om) en q uit horisontale asimptoot. Kry a deur enige ander punt op hiperbool in te vervang.

4. Eksponensiale grafiek $y = a.b^{x+p} + q$ **NB – die teken van x moet positief wees**

Skets: Skryf die waardes van a, b en q uit jou formule neer. a – sê of die grafiek regop (pos) of omgekeerd (neg) is b – sê of asimptoot na links (heelgetal) of regs (breuk) lê q – gee horisontale asimptoot: y = q

Skets die asimptoot in en dan die kurwe met die regte vorm (uit a en b). Bereken y-afsnit deur x = 0 te maak. Bereken nog 'n punt deur x te kies (+1 of -1) , dit in die formule in te vervang en y te bereken. Dui hierdie 2 punte op skets aan.

Bepaal formule: Begin met standaardvorm wat vir jou gegee word. Vervang eers vir q in as die horisontale asimptoot gegee is. Bereken dan die ander onbekendes in die gegewe standaardvorm deur punte op die grafiek in te vervang.

5. Lengtes van lyne

AB // X-as: AB = $x_{regs} - x_{links}$ CD // Y-as: CD = $y_{bo} - y_{onder}$ EF nie // een van die asse: EF = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

6. Snypunte Kry die snypunte van 2 grafieke deur hulle vgls gelyktydig op te los - stel y-waardes van formules gelyk

Finansies

A – eindbedrag **P – beginbedrag** **i -** $\dfrac{rentekoers}{100}$ **n – aantal beleggingsperiodes**

$A = P(1 + i.n)$ **en** $A = P(1 - i.n)$ $\quad A = P(1+i)^n$ **en** $A = P(1-i)^n$ $\quad 1 + i_e = \left(1 + \dfrac{i_{nom}}{m}\right)^m$

Enkelvoudige rente Huurkoop **Waardeverm Reglynig** **Saamgestelde rente Inflasie** **Waardeverm. met verminderde saldo** i_e – effektiewe rentekoers (jaarliks) i_{nom} – nominale rentekoers - meer as 1 keer n jaar

Waarskynlikheid

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$ en

$$P(A\,of\,B) = P(A) + P(B) \quad onderling\ uitsluitend$$
$$P(A\,of\,B) = P(A) + P(B) - P(A\,en\,B) \quad onderling\ NIE\ uitsluitend$$

$$P(A\,en\,B) = P(A) \times P(B) \quad onderling\ onafhanklik$$

Opsomming van teorie Gr 11: Vraestel 2

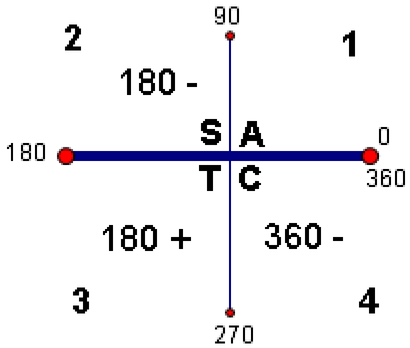
1. TRIGONOMETRIE

1.1. Trig verhoudings

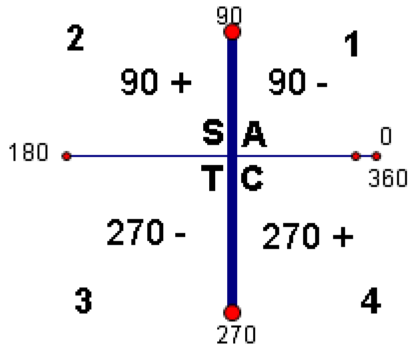
In 'n assestelsel: $\sin A = \dfrac{y}{r}$; $\cos A = \dfrac{x}{r}$; $\tan A = \dfrac{y}{x}$

In 'n rehoekige driehoek: $\sin A = \dfrac{t}{s}$; $\cos A = \dfrac{a}{s}$; $\tan A = \dfrac{t}{a}$

1.2. Herleidings formules X-as hoeke:
Kry skerp hoek en kyk na tekens



1.3 Co-funksies Y-as hoeke:
Verander naam van funksie, kry skerp hoek en kyk na tekens



1.4. Negatiewe hoeke
Tel 360˚ by tot hoek pos is

1.5. hoeke groter as 360˚
Trek 360˚ af tot hoek kleiner as 360˚ is

1.6 Spesiale hoeke:
Groep 1: 0˚; 90˚ ; 180˚ ; 270˚ ; 360˚
Werk verhoudings hiervan met calc uit

Groep 2: 30˚ ; 45˚ ; 60˚
werk uit met calc

NB: WANNEER JY 'N TRIG UITDRUKKING HET:
1. Maak neg hoeke pos
2. Maak hoeke groter as 360˚ kleiner as 360˚
3. Maak alle hoeke skerp mbv herleidings formules

1.7. Identiteite

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \qquad \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \qquad \sin^2 A = 1 - \cos^2 A \qquad \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

Stappe:
Kry dieselfde hoek regdeur; Skryf alles itv sin en cos; Kyk vir vierkantsidentiteit;
Doen opteling, verm en deling van breuke; Kyk uit vir faktorisering;

Onthou truuks: 1. $\dfrac{\quad}{1+\sin A} \times \dfrac{1-\sin A}{1-\sin A}$ $\quad \dfrac{\quad}{1-\sin A} \times \dfrac{1+\sin A}{1+\sin A}$ ens

2. Vervang 1 met $\sin^2 A + \cos^2 A$

1.8. Oplos van vgls
Kry vgl in standaardvorm   Bereken verw hoek met calc (onthou 2nd f en **pos** getal)
Kry 2 Kwadrante vir sin en cos en 1 vir tan   Skryf naam vir hoek =   Skryf regte herleidings formule vir kw in
Vul verw hoek in en tel k.360˚ vir sin en cos en k.180˚ vir tan by   Los op vir onbekende

Soorte trig vergelykings:

- **Gewoon: bv** sin x = 0,35   volg stappe bo
- **Unieke oplossings:** bv sin x = 0   kry oplossing uit grafieke
- **Een sin en een cos term met selfde hoeke**: bv sin 2x –cos 2x = 0   deel met cos om tan te kry
- **Een sin en een cos term met verskillende hoeke:** bv sin x = cos (50 – x)   gebruik co-funksies
- **Kwadratiese vergelykings:** bv $\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0$ kry standaardvorm en faktoriseer

1.9. Trig grafieke $\quad y = a\sin k(x-p)+q \quad y = a\cos k(x-p)+q \quad y = a\tan k(x-p)+q$

Skets:
a – vergroot/verklein grafiek vert kaal;   verander y-waardes   × basis y-waardes met a
q – transleer grafiek vert kaal;   verander y-waardes   tel q by basis y-waardes
k – vergroot/verklein grafiek horisontaal   verander x-waardes   ÷ basis x-waardes met k
p – transleer grafiek horisontaal   verander x-waardes   tel – p by basis x-waardes
Stel eers tabel vir basis waardes op en transformeer dit met bg. Plot dan nuwe punte volgens skaal. Wanneer grafiek horisontaal getransleer is, moet eindpunt en y-afsnit bereken en op skets aangedui word. Dui ewewigslyn en asimptote aan waar toepasl k

Bepaal formule: Begin met standaardvorm wat vir jou gegee word.   Kry q uit ewewigslyn.   Kry a deur maks verplasing vanaf ewewigslyn en deur te kyk of grafiek regop of omgekeerd is.   Kry k deur te kyk hoeveel volledige kurwes die grafiek in die basis periode voltooi   kry p deur te kyk na die horisontale verskuiwing van die dpte

1.10 Olos van driehoeke

- Reghoekige driehoeke – 3 trig verhoudings, benodig 1 hoek en 1 sy of 2 sye. Oppervlakte = ½ basis . loodregte hoogte
- Nie-reghoekige driehoeke - sin reël, benodig H,H,S of S,S,H / cos reël, benodig S,H,S of S,S,S. / Oppervl reël, benodig S,H,S

Sin reel: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$ cos reel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ opp reel $oppvl = \frac{1}{2}a.c.\sin B$

2. ANALITIESE MEETKUNDE

2.1. Afstandsformule: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2.2. Middelpuntstelling: $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ en $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$

2.3. Helling van 'n lyn: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2.4. Koliniêre of saamlynige punte: Maak 2 lynstukke met die 3 punte – 2 lynstukke moet dieselfde hellings hê

2.5. Inklinasie Θ (hoek wat lyn met pos X-as maak) van 'n lyn: $\tan\theta = m$

2.6. Hoek tussen 2 lyne: groter inklinasie – kleiner inklinasie

2.7. Reguitlyn Begin met standaardvorm $y - y_1 = m(x - x_1)$ en eindig dan met standaardvorm $y = mx + c$
Ewewydige lyne se hellings is diesefde en loodregte lyne se hellings het 'n produk van –1

2.8. Snypunte van grafieke Kry die snypunte van 2 grafieke deur hulle vgls gelyktydig op te los

3. TRANSFORMASIE MEETKUNDE

3.1. Translasies: $(x;y) \to (x+3;y-2)$ bv $B(-3;4) \to B'(0;2)$ transleer 3 regs en 2 af

3.2. Refleksies:

3.2.1. In die X-as: $(x;y) \to (x;-y)$ bv $B(-3;4) \to B'(-3;-4)$ y se teken verander

3.2.2. In die Y-as: $(x;y) \to (-x;y)$ bv $B(-3;4) \to B'(3;4)$ x se teken verander

3.2.3. In die lyn y = x $(x;y) \to (y;x)$ bv $B(-3;4) \to B'(4;-3)$ x en y ruil om

3.3.4. In die lyn y = -x $(x;y) \to (-y;-x)$ bv $B(-3;4) \to B'(-4;3)$ x en y ruil om en beide tekens verander

3.3. Rotasies

3.3.1 90˚ Kloksgewys $(x;y) \to (y;-x)$ bv $B \to (-3;4) \to B'(4;3)$ x en y ruil om en nuwe y se teken verander

3.3.2. 90˚ Anti-kloks $(x;y) \to (-y;x)$ bv $B(-3;4) \to B'(-4;-3)$ x en y ruil om en nuwe x se teken verander

3.3.3 180˚ kloks/antikloks $(x;y) \to (-x;-y)$ bv $B(-3;4) \to B'(3;-4)$ beide x en y se tekens Verander

3.4. Vergrotings/verkleinings
Alle punte wat vergroot/verklein word, se köordinate word met die vergrotingsfaktor vermenigvuldig:
$(x;y) \to (kx;ky)$ $bv\,B(-3;4) \to B'(-9;12)$ punt B word vergroot met 'n faktor van 3

4. STATISTIEK

Gemiddelde

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ / $\bar{x} = \frac{\sum f.x}{n}$

rou data gegroepeerd

Mediaan se nr = ½ (n + 1)

Q_1 se nr = ¼ **(n + 1)**

Q_3 se nr = ¾ **(n + 1)**

Vyfgetal opsomming

Min, Q_1, Med, Q_3, Maks

Ogief

(boonste klasgrens; kf)

Werk standaardafwyking uit met calculator.

5. VOLUME EN BUITE OPPERVLAKTE

Prismas

B-oppvl = som van alle oppvlakke

Volume = oppvl basis . hoogte

Piramiedes

B-oppvl = som van alle oppvlakke

Volume = $\frac{1}{3}$ oppvl basis . hoogte

Keël

B-oppvl = som van alle oppvlakke

Volume = $\frac{1}{3}$ oppvl basis . hoogte

Sfeer

B-oppvl = $4\pi r^2$

Volume = $\frac{4}{3}\pi r^3$

Hoofstuk 5:
Finansies

1. WAARDEVERMEERDERING

◆ **Enkelvoudige waardevermeerdering**: $A = P(1 + i.n)$

A - einbedrag nadat rente bygevoeg is.

P - oorspronklike bedrag voor rente bygevoeg is.

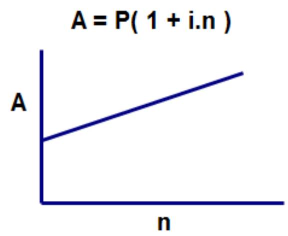
i - rentekoers $\div 100$ dus $i = \frac{r}{100}$

n - hoeveelheid tydperke waarop rente verdien is.

Slegs vir **huurkoop** of **enkelvoudige** rente.

Enkelvoudige rente word net **een keer per jaar** bereken.

Dit lewer 'n reguitlyn grafiek met 'n positiewe helling. Die waardes van A is op die y-as en die waardes van n op die x-as. Die y-afsnit gee P se waarde en die helling gee r se waarde.



Voorbeeld:

Hoeveel rand moet ek belê teen $6,5\%$ p.j enkelvoudige rente sodat my belegging na 4 jaar $R5017,22$ werd sal wees?

$A = 5017,22; \quad i = \frac{6,5}{100} = 0,065 \quad n = 4 \quad P = ?$

$A = P(1 + i.n)$

$5017,22 = P(1 + 0,065(4))$

$5017,22 = P(1,260)$

$\frac{5017,22}{1,260} = \frac{P(1,260)}{1,260}$

$3981,92 = P$

$R3981,92$ moet belê word.

◆ **Saamgestelde of eksponensiële waardevermeerdering**: $A = P(1 + i)^n$

Saamgestelde rente, **inflasie**, bevolkingsgroei en enige ander **eksponensiële groei**.

Saamgestelde rente kan ook **meer as een ker jaar** bereken word. Dit beïnvloed die

waardes van i en n. Indien rente bv maandeliks bereken word, verkry die i-waarde vir 'n maand deur $\frac{i}{12}$ en skakel die jare om na maande deur jare$\times 12$

5% p.j termynliks saamgestel vir 3 jaar: $i = \frac{0{,}05}{3}$; $n = 3 \times 3$ termyne

5% p.j kwartaaliks saamgestel vir 3 jaar: $i = \frac{0.05}{4}$; $n = 3 \times 4$ kwartale

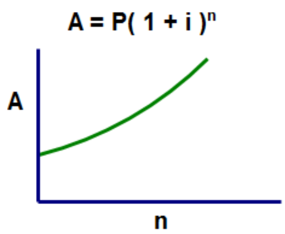
5% p.j maandeliks saamgestel vir 3 jaar: $i = \frac{0{,}05}{12}$; $n = 3 \times 12$ maande

5% p.j weekliks saamgestel vir 3 jaar: $i = \frac{0{,}05}{52}$; $n = 3 \times 52$ weke

5% p.j daagliks saamgestel vir 3 jaar: $i = \frac{0{,}05}{365}$; $n = 3 \times 365$ dae

Dit lewer 'n eksponensiële grafiek wat stygend is. Die waardes van A is op die y-as

en die waardes van n op die x-as. Die y-afsnit gee P se waarde.



Voorbeeld:

Hoeveel moet ek belê teen $6,5\%$ p.j saamgestelde rente sodat my belegging na 4 jaar $R5017,22$ werd sal wees?

$A = 5017,22;$ $i = \frac{6,5}{100} = 0,065$ $n = 4$ $P = ?$

$A = P(1+i)^n$

$5017,22 = P(1+0,065)^4$

$5017,22 = P(1,286\ldots)$

$3900,00 = P$

$R3900,00$ moet belê word.

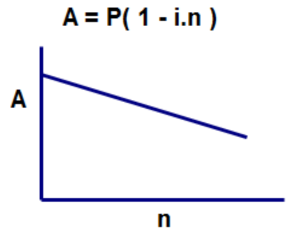
2. WAARDEVERMINDERING

◆ **Enkelvoudige waardevermindering**: $A = P(1 - i.n)$

Slegs vir **konstante** of **reglynige** waardevermindering (depresiasie).

Waardevermindering word **net een keer per jaar** bereken. Dus bly i se waarde vir 'n jaar en n bly in jare.

Dit lewer 'n reguitlyn grafiek met 'n negatiewe helling. Die waardes van A is op die y-as en die waardes van n op die x-as. Die y-afsnit gee P se waarde en die helling gee r se waarde.



Voorbeeld:

Bereken die boekwaarde van 'n masjien wat $R45000$ gekos het aan die einde van 4 jaar as waardevermindering bereken word teen 'n konstante koers van 16% p.j

$P = 45000 \qquad i = 0,16 \qquad n = 4$

$A = P(1 - ni)$

$A = 45000(1 - 4.0,16)$

$A = 16200$

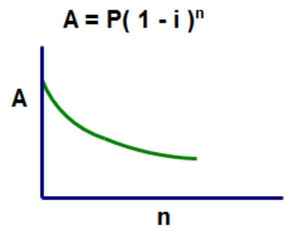
Boekwaarde $R16200$

- **Saamgestelde of eksponensiële waardevermindering**: $A = P(1 - i)^n$

Slegs vir waardevermindering teen **verminderde saldo**.

Waardevermindering word **net een keer per jaar** bereken. Dus bly i se waarde vir 'n jaar en n bly in jare.

Dit lewer 'n eksponensiële grafiek wat dalend is. Die waardes van A is op die y-as en die waardes van n op die x-as. Die y-afsnit gee P se waarde.



Voorbeeld:

Bereken die boekwaarde van 'n masjien wat R45 000 gekos het aan die einde van 4 jaar as waardevermindering bereken word teen 16% p.j teen die verminderde saldo.

$P = 45000 \qquad i = 0,16 \qquad n = 4$

$A = P(1 - i)^n$

$A = 45000(1 - 0,16)^4$

$A = 22404,21$

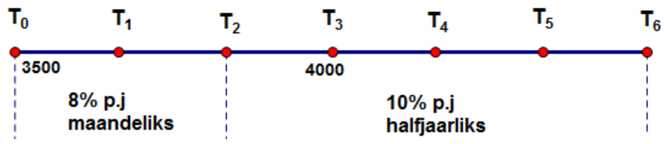
Boekwaarde $R22404,21$

3. TYDLYNE

- **Tydlyne** word gebruik as hulpmiddel wanneer verskillende rentekoerse geld tydens die beleggingstydperk en/of as daar meer as een deposito en of ontrekking is.
- Tydlyne kan by waardermeerdering en waardevermindering gebruik word.
- Beskou elke deposito/ontrekking as aparte rekenings.

Voorbeeld:

Kate deponeer R3 500 in 'n spaarrekening. Drie jaar later voeg sy $R4000$ by tot die spaarrekening. Die rentekoers vir die eerste twee jaar is 8% p.j, maandeliks saamgestel. Daarna verander die rentekoers na 10% p.j, halfjaarliks saamgestel. Bereken die waarde van die spaargeld aan die einde van die sesde jaar.



$A = P(1+i)^n$

Dep van R 3500

waarde by T_2

$A_{3500} = 3500\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}$

waarde by T_6

$A_{3500} = 3500\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}\left(1+\frac{0,10}{2}\right)^{8}$

Dep van R 4000

waarde by T_6

$A_{4000} = 4000\left(1+\frac{0,10}{2}\right)^{6}$

Totale waarde $= 3500\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{24}\left(1+\frac{0,10}{2}\right)^{8} + 4000\left(1+\frac{0,10}{2}\right)^{6}$

$= R11425,50$

4. EFFEKTIEWE EN NOMINALE RENTE

Met die effektiewe rentekoers word rente **slegs een keer per jaar bereken - dus jaarliks**.

Met die nominale rentekoers word rente **meer as een keer per jaar bereken - dus maandeliks, kwartaalliks ens**.

Indien een van die 2 gegee is, kan die ander een berken word met die formule

$1 + i_e = \left(1+\frac{i_{nom}}{m}\right)^m$ **NIE op formuleblad**!

i_e = effektiewe rentekoers $\div 100$

i_{nom} = nominale rentekoers $\div 100$

m = hoeveelheid keer wat rente per jaar bereken word.

- **NB**: **Hierdie formule word slegs gebruik om een soort rentekoers na 'n ander om te skakel - dus van i_e na i_{nom} of van i_{nom} na i_e . In enige ander probleme waar beleggings met die een of die ander soort rentekoers gemaak word,**

word die formule $A = P(1+i)^n$ gebruik.

- **Hierdie formule werk oor 'n EEN jaar tydperk. Jy bepaal m dus deur te kyk hoeveel keer die nominale rente in EEN jaar bereken word. Indien die nominale rente dus maandeliks bereken word, is $m = 12$**

Voorbeeld:

$R15000$ word in 'n spaarrekening gedeponeer. Die rentekoers is 11% p.j maandeliks saamgestel. Bereken die effektiewe rentekoers per jaar, korrek tot 1 desimale plek.

Omdat die rente maandeliks saamgestel word (dus meer as 1 keer per jaar) weet ons dat die rentekoers wat gegee is, die genomineerde rentekoers i_{nom} is.

$i_{nom} = 0,11 \qquad m = 12$

$1 + i_e = \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^m$

$1 + i_e = \left(1 + \frac{0,11}{12}\right)^{12}$

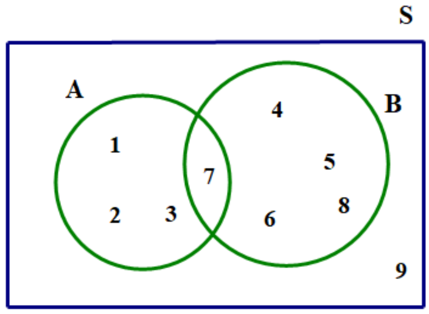
$1 + i_e = 1,1157\ldots.$

$i_e = 0,1157\ldots..\times 100$

Dus die effektiewe rentekoers is $r_e = 11,6\%$

Hoofstuk 6: Waarskynlikheid

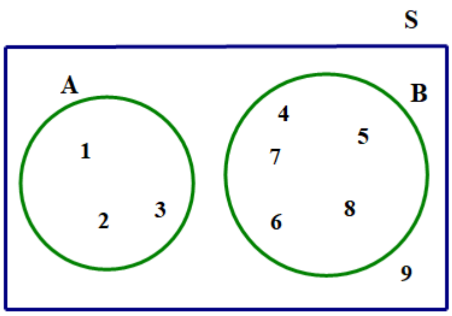
1. ONDERLING NIE UITSLUITENDE GEBEURTENISSE A EN B



A **en** B **is onderling NIE uitsluitend want** $n\left(A \text{ en } B\right) = 1 \neq 0$ **- daar is elemente in die snyding.**

- $P\left(A \text{ en } B\right) \neq 0$
- $P\left(A \text{ of } B\right) = P(A) + P(B) - P\left(A \text{ en } B\right)$ OF $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. ONDERLING UITSLUITENDE GEBEURTENISSE A EN B

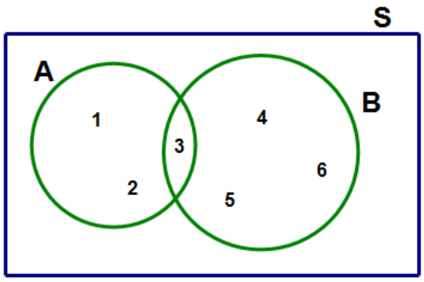


A **en** B **IS onderling uitsluitend want** $n\left(A \text{ en } B\right) = 0$ **- daar is nie elemente in die snyding nie**

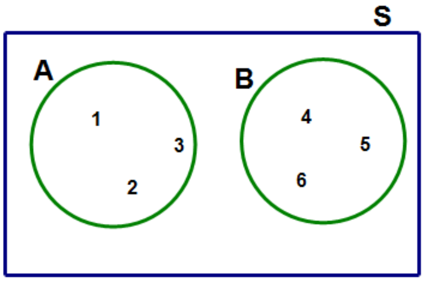
- $P\left(A \text{ en } B\right) = 0$
- $P\left(A \text{ of } B\right) = P(A) + P(B)$ OF $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3. UITPUTTENDE GEBEURTENISSE A EN B (m.a.w. A en B vul die steekproefruimte)

Indien **al die elemente van** die steekproefruimte **S** vervat word in **A en/of B**, is A en B **uitputtende** gebeurtenisse.



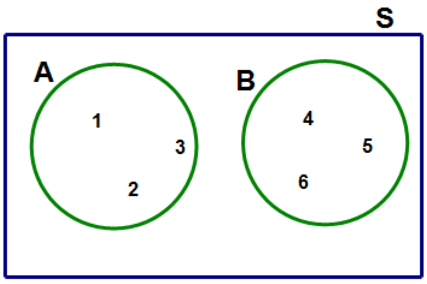
OF



- $P\left(A \text{ of } B\right) = 1$ OF $P(A \cup B) = 1$

4. KOMPLEMENTÊRE GEBEURTENISSE A EN B

Indien 2 gebeurtenisse A en B onderling **uitsluitend en uitputtend** is, is hulle komplementêr.



- $P\left(A \text{ en } B\right) = 0$
- $P\left(A \text{ of } B\right) = P(A) + P(B)$
- $P\left(A \text{ of } B\right) = 1$
- ***Onthou dat A en nie-A OF A en A' ALTYD komplementêre gebeurtenisse is en daarom geld ALTYD:***

  $P(A) + P\left(\text{nie } A\right) = 1$ ***OF*** $P(A) + P(A') = 1$

  $P\left(\text{nie } A\right) = 1 - P(A)$ $P(A') = 1 - P(A)$

5. ONAFHANKLIKE GEBEURTENISSE

Bereken $P\left(A \text{ en } B\right)$ asook $P(A) \times P(B)$.

- Indien $P\left(A \text{ en } B\right) = P(A) \times P(B)$ is gebeurtenisse A en B onderling **onafhanklik**.
- Indien $P\left(A \text{ en } B\right) \neq P(A) \times P(B)$ is gebeurtenisse A en B onderling **NIE**

  onafhanklik nie.
- ***NB: Indien gegee word dat twee gebeure onderling ONAFHANKLIK is, is hullle outomaties ook onderling NIE UITSLUITEND want onafhanklikheid impliseer*** $P\left(A \text{ en } B\right) = P(A) \times P(B)$ ***en dus is*** $P\left(A \text{ en } B\right) \neq 0$

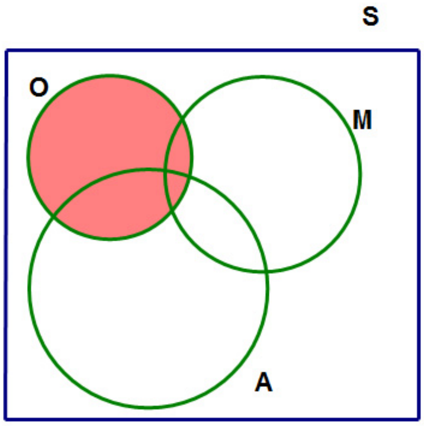
6. TEGNIEKE WAT AS HULPMIDDELS GEBRUIK WORD

Kyk na die soort inligting en die vrae om te besluit watter hulpmiddel die beste sal werk.

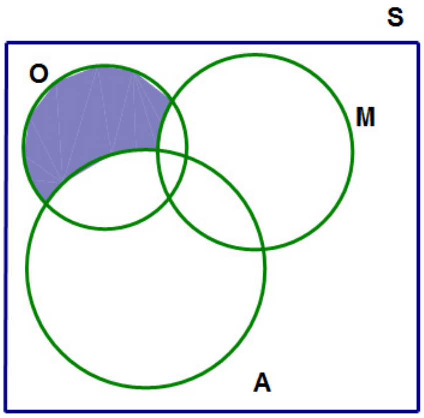
- 3 soorte Venn-diagramme:

1. Waar al die verskillende elemente in elke gebeurtenis aangedui word.
2. Waar die aantal elemente in elke gebeurtenis aangedui word.
3. Waar die waarskynlikhede van elke gebeurtenis aangedui word.

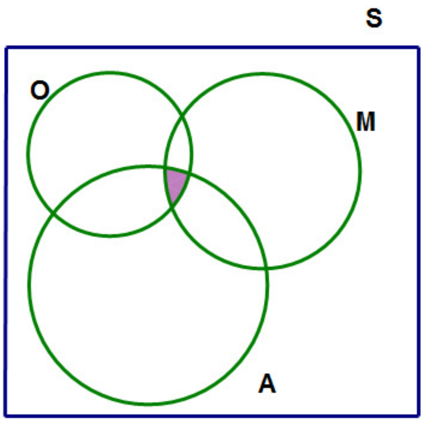
Dit is NB dat jy weet presies waarvoor elke gedeelte in die Venn-diagram staan



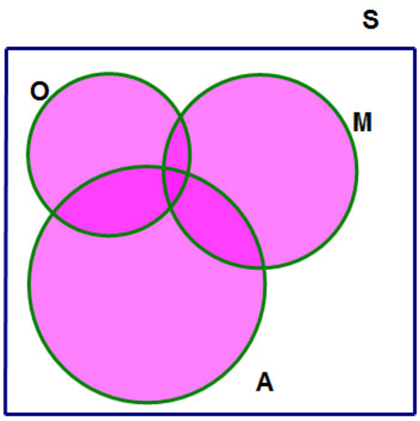
Ingekleurde deel: O
Hele nie ingekleurde deel (wit): nie-O



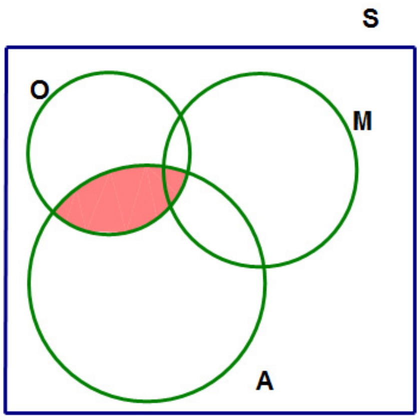
Ingekleurde deel: net O



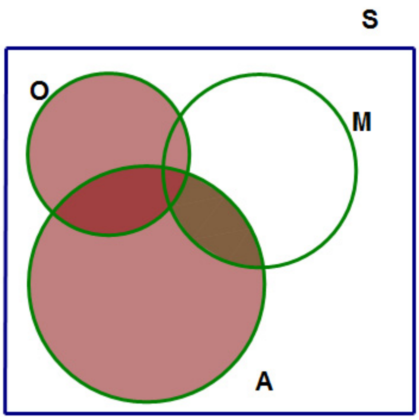
Ingekleurde deel: O en M en A



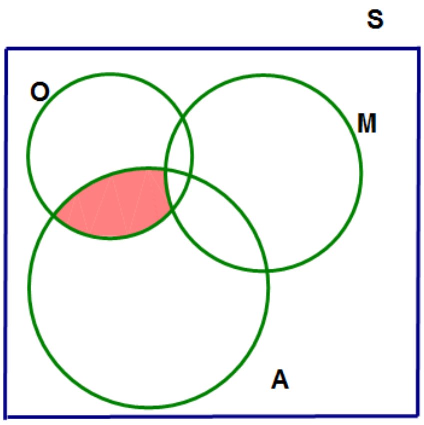
Ingekleurde deel: O of M of A
Hele nie ingekleurde deel (wit): nie(O of M of A)



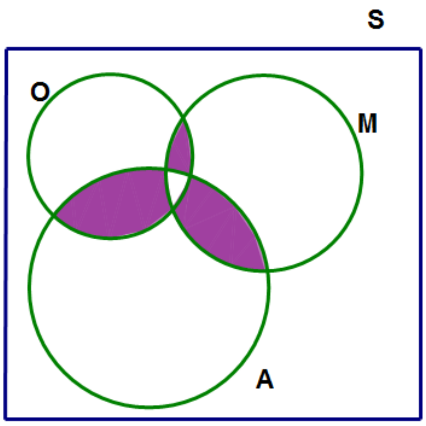
Ingekleurde deel: O en A



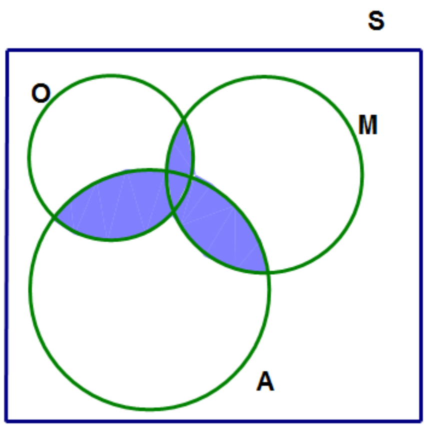
Ingekleurde deel: O of A



Ingekleurde deel: O en A maar nie M



Ingekleurde deel: net 2 van die 3



Ingekleurde deel: ten minste 2 van die 3

- Boomdiagramme

Dit werk goed waar 2 of meer gebeurtenisse een na die ander plaasvind. Onthou om te kyk

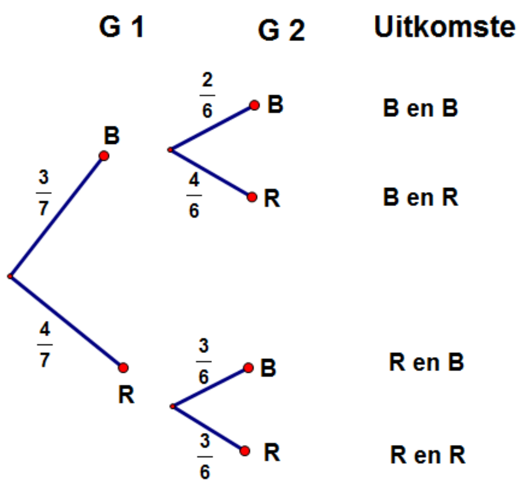
of die gebeure onafhanklik is of nie, want dit beïnvloed die waarskynlikheid op die takke.

Voorbeeld:

’n Sak bevat 4 rooi en 3 blou krale. Twee krale word, een na die ander, na willekeur uit die

sak gehaal. Teken ’n boomdiagram en bepaal die waarskynlikheid dat een rooi en die ander

een blou sal wees.



- **NB**: Onthou in die boomdiagramme is **en** ’n $\times$
- **NB**: Onthou in die boomdiagramme is **of** ’n $+$

$P\left(R \text{ en } B \text{ of } B \text{ en } R\right) = P(R) \times P(B) + P(B) \times P(R) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{7}$

- Twee-rigting gebeurlikheids tabelle

Dit is ’n baie handige tegniek om te toets of 2 gebeure ONAFHANKLIK is of nie.

Voorbeeld:

Beskou die volgende tweerigting gebeurlikheidstabel wat die aantal mans en vrouens aandui wat vir ’n kursus ingeskryf het asook die aantal wat druip en slaag.

	S	D	**Totaal**
M	80	20	100
V	48	12	60
Totaal	128	32	160

Stel vas of die slaagsyfer van die geslag **afhanklik** is.

$P(V \text{ en } S) = \frac{n(V \text{ en } S)}{n(\text{Tot})} = \frac{48}{160} = \frac{3}{10}$

$P(V) \times P(S) = \frac{60}{160} \times \frac{128}{160} = \frac{3}{10}$

Dus $P(V \text{ en } S) = P(V) \times P(S)$ en daarom is die slaagsyfer ONAFHANKLIK van die geslag.

Meer oor "Wiskunde Anibrand Graad 11 Teorieboek" en die outeur.

Ek is reeds vir 28 jaar betrokke by Wiskunde-onderrig vir graad 8 tot graad 12 leerders. Die afgelope 10 jaar is ek verbonde aan Hoërskool Die Wilgers in Pretoria, waar ek 'n Wiskunde Akademie bedryf met een groep in elke graad.

Die Wiskunde Anibrand Graad 11 Teorieboek is opgestel om vir graad 11 leerders 'n enkele boek te bied waarin al die teorie wat hulle vir die graad 11 eksamens moet ken, opgesom is. Dit behandel elke afdeling wat in die eksamenvraestelle geëksamineer word, afsonderlik en volledig.

Indien leerders hierdie boek gebruik, hoef hulle geen verdere opsommings te maak nie en kan hulle hulle tyd eerder gebruik in aktiewe voorbereiding vir die eksamens.

Hierdie boek is die antwoord vir alle graad 11 leerders wat wil presteer in hulle graad 11 Wiskunde eksamens .

www.wiskundeanibrand.com

ISBN 978-0-620-83391-2

9 780620 833912